Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
M.Sc. Thor Wittich

Wintersemester 2021/22
10.01.2022

Lineare Algebra I
Blatt 11

---

1 | Augen zu und durch!

Gegeben ist das folgende reelle lineare Gleichungssystem mit Unbestimmten $x_1, \dots, x_6$ und einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_2 & - & 9x_3 & + & 6x_4 & - & 6x_5 & + & 15x_6 & = & 6t+18 \\ -x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & - & 9x_6 & = & -t-4 \\ -2x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & + & 6x_5 & - & 18x_6 & = & -2 \\ 4x_2 & - & 12x_3 & + & 8x_4 & - & 12x_5 & + & 36x_6 & = & 8t+28 \end{array}$$

(a) Bringen Sie die Koeffizientenmatrix mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilenstufenform.
(b) Bestimmen Sie alle Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt.
(c) Bestimmen Sie in den Fällen, in denen das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, den Lösungsraum. Geben Sie dabei auch eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

2 | Bitte wenden!

Welchen Rang haben die folgenden Matrizen? Bestimmen Sie zu allen Matrizen von vollem Rang die Inversen!

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3 | Babel ★

Seien $\texttt{OL}$, $\texttt{UL}$, $\texttt{OR}$ und $\texttt{UR}$ die folgenden Matrizen:

$$\texttt{OL} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \texttt{OR} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\texttt{UL} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \texttt{UR} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als geordnete Basis des Vektorraums aller reellen 2×2-Matrizen wählt …

… Hans das Tupel $(\texttt{OL}, \texttt{OR}, \texttt{UL}, \texttt{UR})$,
Jaël das Tupel $(\texttt{OR}, \texttt{OL}, \texttt{UR}, \texttt{UL})$,
Sakura das Tupel $(\texttt{OR}, \texttt{UR}, \texttt{OL}, \texttt{UL})$ und
Hunapú das Tupel $(\texttt{OL} - \texttt{UR}, \texttt{OR}, \texttt{UL}, \texttt{OL} + \texttt{UR})$.

Zeigen Sie, dass das in der Tat allesamt Basen sind. Mit welcher 4×4-Matrix würden Hans, Jaël, Sakura und Hunapú jeweils die Transpositionsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) &\to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beschreiben?

— Aufgabe 4 auf der nächsten Seite —

4 | Potenzproblem ★

Wir nennen eine quadratische Matrix A *nilpotent*, wenn eine ihrer Potenzen A^k ($k \in \mathbb{N}$) die Nullmatrix ist. Eine *strikte obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix $(a_{i\,j})_{i,j}$ mit $a_{i\,j} = 0$ für alle $i \geqslant j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Strikte obere Dreiecksmatrizen sind nilpotent.

(b) Für jede nilpotente $n \times n$-Matrix A ist $\mathbb{1}_n - A$ invertierbar.

(c) Welches Inverse hat die folgende Matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipp zu Aufgabenteil (b): $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ *(„geometrische Reihe“)*

Abgabefrist: 19.01.2022, 10:15 Uhr (nur online). Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Datei nicht größer als 15 MB ist.